

# 一种分数傅里叶域线性调频信号高精度码同步方法

温容慧, 沙学军, 张欣宇

(哈尔滨工业大学通信技术研究所, 150001, 哈尔滨)

**摘要:** 针对传统同步方法只能采用提高采样频率来提高同步精度的局限, 提出一种分数傅里叶域高精度同步方法. 该方法使用线性调频信号(Chirp 信号)替代多比特余弦载波同步信号, 在接收端同步信号经分数傅里叶变换后判决峰值位置, 再与理论峰值位置作比较得出同步位置. 通过分析影响 Chirp 信号分数傅里叶域峰值幅度的参数, 发现峰值幅度随着同步码片数的增加而增加, 从而提高了同步的精度. 与传统的同步方法相比, 该方法在采样率相同的条件下能获得更高的同步精度. 仿真结果表明, 当同步码为 7、11 b, 信噪比为 2、4 dB 以上时, 该方法同步精度高于传统方法, 并且精度迅速提高.

**关键词:** 同步; 分数傅里叶变换; Chirp 信号

**中图分类号:** TN911.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)04-0080-05

## An Accurately Synchronous Method Using Chirp Signal in Fractional Fourier Domain

WEN Ronghui, SHA Xuejun, ZHANG Xinyu

(Communication Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** Because of the drawback of traditional methods that improving synchronous precision can only be achieved by increasing the sampling frequency, a new method is proposed. The proposed method uses the Chirp signal, instead of cosine carrier signal, as the synchronous signal, and determines the peak location in fractional Fourier domain(FrFT) at the receiver. Then the synchronization is obtained by comparing the resulting peak location with the theoretical peak location. Through analysing the parameters that affect the amplitude of Chirp signal in FrFT domain it is found that the amplitude will increase with the increase of the number of chips, and hence increase the synchronous precision. Comparisons with traditional methods show that the proposed method has higher precision with the same sample frequency. Simulation results show that if the synchronous number is 7 or 11 bits and SNR is above 2 or 4 dB, the precision of the proposed method is higher than the traditional methods and increases rapidly.

**Keywords:** synchronization; fractional Fourier transform; Chirp signal

传统的同步方法在发射端将巴克码序列经余弦载波调制后发射. 在接收端, 以同步解调窗内的每一点分别作为起点, 在数据中取和同步码长度相等的一段信号与同步码做相关, 这样可以得到  $N$  个相关值, 然后比较这  $N$  个值, 最大值对应的窗的起点就是同步点. 因此, 如果要提高同步精度, 只能通过提

高采样频率来实现.

分数傅里叶变换是由 Namias<sup>[1]</sup> 以纯数学方式提出的, 之后又有研究人员提出了与原定义等价的定义方式<sup>[2]</sup>. 分数傅里叶变换在光学、力学等领域均有应用, 近年来在信号处理领域的研究得到越来越广泛的关注<sup>[3-8]</sup>. 文献[4]利用在分数域的 Chirp 信

号与余弦载波信号可有效分离的特性,提出在分数傅里叶域处理信号可以有效地避免 Chirp 信号造成的干扰,但并没有对 Chirp 信号加以利用. 之后有研究人员提出 Chirp 信号变换到分数傅里叶域后,做信号参数估计可以获得很好的效果<sup>[5-6]</sup>. 由于信号在分数傅里叶域有良好的能量聚集特性,因而人们提出用 Chirp 信号作为载波传输信息,在分数域做峰值判决的方法,但由于这种方法是非相干解调而导致解调误码率比传统余弦信号相干解调误码率高 6 dB<sup>[7]</sup>. 文献[8]提出将 Chirp 序列作为同步信号与 OFDM 信号叠加,接收信号经过分数傅里叶变换后,根据峰值位置估计频偏、时偏,但信号叠加会增大信号间的干扰. 本文提出的基于分数傅里叶变换域的线性调频信号精确比特同步方法,在采样频率相同的情况下,用一个 Chirp 信号代替由余弦信号调制的多比特巴克码序列的同步信号,利用分数傅里叶变换后,多个比特 Chirp 信号在时域的能量能够在峰值处累积的特性,将 Chirp 信号从噪声、干扰中分离出来,从而提高了同步精度.

1 Chirp 信号分数傅里叶变换

分数傅里叶变换(FrFT)是傅里叶变换的一种广义形式<sup>[9]</sup>. 信号在分数阶傅里叶域的表示,同时包含了信号在时域和频域的信息.

从线性积分变换的角度给出时域函数  $f(t)$  的分数傅里叶变换的基本定义为

$$f_p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K(\alpha;u,t)dt \tag{1}$$

式中:下标  $p$  为分数傅里叶变换的阶数; $\alpha$  为分数傅里叶变换域与时间轴之间的旋转角度, $\alpha = \pi p/2$ ;  $u$  为分数域的横轴; $t$  为时域的横轴;算子核  $K(\alpha;u,t)$  可以定义为

$$K(\alpha;u,t) = \left(\frac{1-icot\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot \exp\left[i\left(\frac{u^2+t^2}{2}cot\alpha - utcsc\alpha\right)\right] \tag{2}$$

当  $\alpha = \pi/2$  时,有  $f_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi ut)f(t)dt$ , 即  $p = 1$  时,就是普通的傅里叶变换.

Chirp 信号的时域表达式为

$$f(t) = \exp[i(\phi + 2\pi f_0 t + k\pi t^2)] \tag{3}$$

式中: $\phi$  为初始相位, $f_0$  为中心频率,为推导方便,取  $\phi = 0$ 、 $f_0 = 0$ ;  $k$  为调频率,决定了信号频率变化的快慢. 带宽  $B = kT$ ,  $T$  为 Chirp 信号时域宽度. Chirp 信号的  $p$  阶分数傅里叶变换经过化简和变量代换得到

$$f_p(u) = \begin{cases} \left(\frac{1+itan\alpha}{1+k\tan\alpha}\right)^{1/2} \exp\left[i\frac{u^2}{2}\left(\frac{k-\tan\alpha}{1+k\tan\alpha}\right)\right] & \alpha - \arctan k - \frac{\pi}{2} \neq l\pi \\ \delta(u) & \alpha - \arctan k - \frac{\pi}{2} = l\pi \end{cases} \tag{4}$$

由式(4)可看出,Chirp 信号在  $p = \text{arccot}k/\frac{\pi}{2}$  阶分数傅里叶变换域有十分优良的能量聚集特性.

2 精确同步方法介绍及分析

2.1 系统介绍

分数傅里叶域线性调频信号高精度同步方法是使用线性调频信号替代余弦信号作为同步信号,在分数傅里叶域用峰值位置判决法确定同步位置从而提高同步精度的方法. 同步系统框图如图 1 所示. 在系统的发射端,与传统余弦信号作为载波调制巴克码不同,将具有一定码元数的同步码字作为一个码片,在这个码片时间内发射一个 Chirp 信号作为同步信号加在每一帧信息的信号前,Chirp 信号的中心频率、带宽保持与原同步信号一致,扫频速度  $k$  由信号带宽、时长决定. 根据 Chirp 信号的扫频速度、中心频率确定能量聚集的阶数  $\alpha$ 、峰值位置  $n$ . 在系统的接收端,对接收信号  $r(t)$  做相应的分数傅里叶变换,读取峰值位置  $n'$ . 根据分数傅里叶的性质可

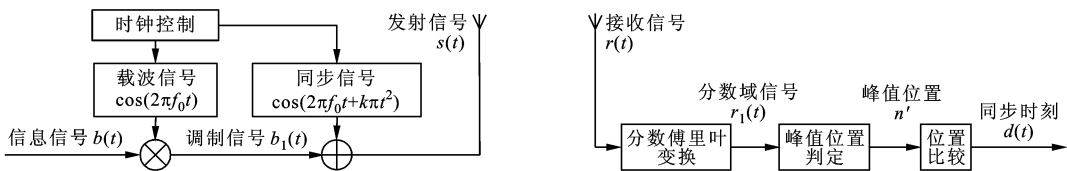


图 1 Chirp 信号峰值判决法同步系统框图

知,若  $f(t-\tau)$  为信号  $f(t)$  在时域偏移  $\tau$  的表达式,则  $f(t-\tau)$  的  $p$  阶分数傅里叶变换可表示为

$$F_p[f(t-\tau)] = \exp(i\pi\tau^2 \sin\alpha \cos\alpha) \cdot \exp(-i2\pi\tau \sin\alpha) f_p(u - \tau \cos\alpha)$$

由同步信号标准峰值位置  $n$  与接收信号峰值位置  $n'$ ,根据  $\Delta t = (n - n') / \cos\alpha$  即可求出信号时域的同步位置。

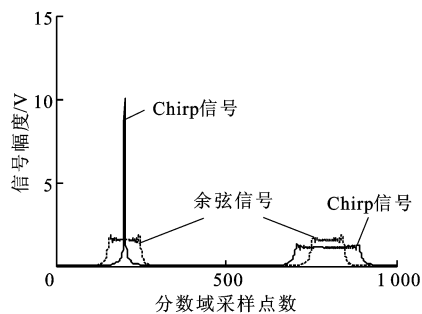
## 2.2 性能分析

在实际的通信系统中,发射端发射的信号为实余弦函数,为 2 个共轭 Chirp 信号的叠加

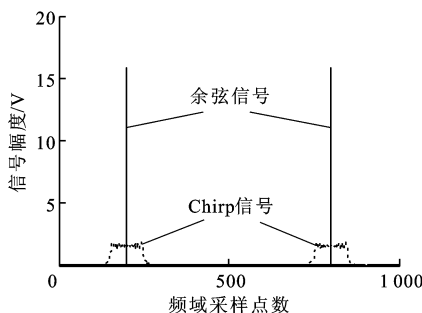
$$c(t) = \{\exp[i(2\pi f_0 t + \pi k t^2)] + \exp[-i(2\pi f_0 t + \pi k t^2)]\} / 2 = \cos(2\pi f_0 t + \pi k t^2) \quad (5)$$

Chirp 信号和余弦信号在  $p$  阶分数傅里叶域和频域有以下特性:当 Chirp 信号扫频速度  $k$  为正时,峰值出现在分数域的前半段;当  $k$  为负时,峰值出现在分数域的后半段。其原因在于 2 个共轭的 Chirp 信号  $\exp[i(2\pi f_0 t + \pi k t^2)]$  和  $\exp[-i(2\pi f_0 t + \pi k t^2)]$  分别代表了峰值部分和具有平坦特性的部分,并且 2 部分能量相等。

根据前面的介绍可知,Chirp 信号在对应的  $p$  阶分数傅里叶域有能量聚集的特性,而余弦信号在频域有能量聚集的特性。图 2 为 Chirp 信号和余弦



(a) 分数域



(b) 频域

图 2 Chirp 信号、余弦信号在分数域和频域的波形图

信号在  $p$  阶分数域和频域的波形对比图。从图 2 中的对比可以看出,Chirp 信号在频域为相同的具有

较宽带宽、较低幅度的 2 部分,而在分数域也分为 2 部分,一部分为具有能量聚集的峰值较高类似脉冲的部分,另一部分为带宽较宽、幅度较低的部分。余弦信号在频域为 2 个相同的具有能量聚集的峰值较高的部分,而在分数域为 2 个相同的具有较宽带宽、较低幅度的部分。

根据 Chirp 信号在分数域良好的能量聚集特性,可以利用峰值检测法来解调信息。但是,通过推导和仿真实验,已经验证峰值检测法的解调误码率明显高于时域相关法,原因在于白噪声变换到分数域仍然是随机的白噪声,Chirp 信号虽然具有很好的能量聚集特性,但在较低信噪比时仍淹没在白噪声中,在高信噪比时受到白噪声的干扰也很大。

据 Chirp 信号的分数阶傅里叶表达式可知,当截断的 Chirp 信号中心频率为  $f_0$ 、相位  $\phi$  为 0、调频率为  $k$ 、持续时间为  $[-T/2, T/2]$ 、幅度为  $A$  时,该 Chirp 信号的  $p$  阶分数傅里叶变换为

$$f_p(u) = A(1 - i \cot\alpha)^{1/2} \int_{-T/2}^{+T/2} \exp[i\pi(t^2 \cot\alpha - 2ut \csc\alpha + u^2 \cot\alpha)] \exp[i\pi u t^2] dt = \frac{A}{(\sin\alpha)^{1/2}} \exp\left[i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{4} u^2 \cot\alpha\right)\right] \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \exp[i\pi t^2 (\cot\alpha + k)] \exp[i2\pi t (f_0 - u \csc\alpha)] dt \quad (6)$$

由式(6)可知,当  $k = -\cot\alpha$ ,  $f_0 = u \csc\alpha$  时,  $|f_p(u)|^2$  取最大值

$$|f_p(u)|^2 = \frac{A^2 T^2}{|\sin\alpha|} = A^2 T^2 (\cot^2\alpha + 1)^{1/2} = A^2 T^2 (k^2 + 1)^{1/2} = A^2 T^2 ((B/T)^2 + 1)^{1/2} \quad (7)$$

根据上面的推导可以看出,Chirp 信号在分数傅里叶域的峰值与信号的持续时间、带宽和幅度有关。因此,要改变信号的峰值大小,可通过改变信号的这 3 个参数实现。在实际通信系统中,一般信号的功率、带宽是不变的,因此可以通过增加信号的持续时间来增加分数傅里叶域信号的峰值高度,这就相当于一个能量累积的过程,可以通过增加同步码片的数目来实现。随着码片数的增加,同步信号在分数傅里叶域的能量不断累加,峰值幅度也随着升高,而噪声则不会随之累加,因而 Chirp 信号更容易从噪声中分离出来,以获得更好的同步精度。

根据前面对 Chirp 信号、余弦信号在分数域和频域的波形的对比,可以看出余弦与 Chirp 信号具有不同的能量聚集阶数,余弦信号仅在频域有很好的能量聚集,在分数域为比较平坦的信号,而 Chirp

信号则相反.若信息信号、同步信号分别采用余弦、Chirp信号调制,则解调时信息信号对同步信号的码间干扰较小.

这种方法的另一个优势是计算量较小.离散分数傅里叶变换的计算量为 $O(N\lg N)$ ,而传统的时域滑动窗计算量为 $N^2$ ,可见该方法降低了计算量.

### 2.3 同步相位差的影响

传统系统中,接收端对余弦载波解调时,如果接收信号与本地模板信号存在一定相位差 $\phi$ ,将影响系统的解调性能,对于同步信号也是如此. $\cos\phi$ 的大小将影响滑动窗内积分值的大小,从而影响同步精度,而对于本文提出的Chirp信号分数域峰值判决法,接收信号为 $r(t) = \cos(2\pi f_0 t + k\pi t^2 + \varphi)$ ,峰值高度为

$$|r_1(t)| = |f_p[r(t)]| = |\exp(\cos\varphi)| |\delta(u - u_0)| = |\delta(u - u_0)| \quad (8)$$

可见相位偏差对峰值的高度、位置都没有影响,因而不会造成同步误差.

### 2.4 多径影响

通信中,多径干扰在时域会严重影响波形,增大解调误差.设 $\tau$ 为多径时延,根据分数域性质得到

$$|F_p[f(t - \tau)]| = |\exp(i\pi\tau^2 \sin\alpha \cos\alpha) \exp(-i2\pi\tau \sin\alpha) \cdot f_p(u - \tau \cos\alpha)| = |f_p(u - \tau \cos\alpha)| \quad (9)$$

由上式可知,在分数域多径信号相当于主径信号平移 $\tau \cos\alpha$ ,幅度不变,因此当Chirp信号的多径与主径到达时间相差较大时,在分数域多径会与主径分离,从而不会影响信号的同步.当Chirp信号的多径与主径到达时间相差较小时,由于 $|\tau \cos\alpha| < \tau$ ,多径信号与主径信号的差别远小于其在时域的,甚至会部分重合,因此虽然会给同步带来一定的误差,但与时域相关解调相比要小很多,这点从后面的仿真实验也可以看出.

## 3 仿真结果及分析

COST 207模型是欧洲电信标准协会提出的一个普遍适用的信道模型.COST 207的典型城区的信道参数为

$$P(\tau) = \begin{cases} \exp(-\frac{\tau}{10^{-6}}) & 0 < \tau < 7 \mu\text{s} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

式中: $P(\tau)$ 为多径功率; $\tau$ 为多径时延.在GSM系统中,相邻频点间隔为200 kHz,由此可以确定码片持续时间为10  $\mu\text{s}$ .

仿真参数设定:中心频率为2 MHz;采样频率

为10 MHz;码速率为100 kb/s;系统带宽为200 kHz.

图3为系统信噪比为5 dB时的高斯白噪声信道下的Chirp信号分数域波形,其中Chirp信号占用5 b码片长度.可以看出,Chirp信号的能量聚集峰值明显高于白噪声,此时根据峰值位置可以准确判断同步位置.

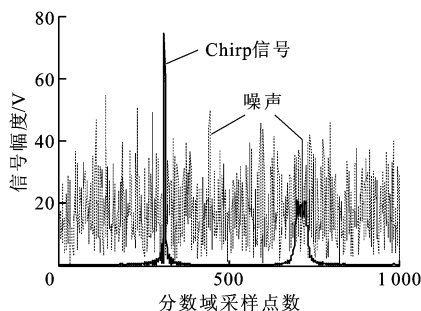


图3 高斯白噪声信道下Chirp信号分数域波形

图4为不同码字长度时同步码误差精度,各种情况下信号带宽保持不变.其中,余弦调制的同步信号使用巴克码作为信源.由图4可以清楚地看出,增大同步信号码片长度,2种方法的同步精度均有提高,但Chirp信号分数域峰值判决法同步精度的提高比余弦信号时域滑动窗方法更为明显.在较低信噪比条件下,分数域同步方法略差于余弦时域方法,当同步码字分别为3、7、11 b时,分数域同步法的精度在6、4、2 dB以上时超过余弦时域法,并且分数域同步方法的误差迅速下降.由此可以看出,随着码片数的增加,Chirp信号分数域峰值判决方法的同步误差精度明显提高.这是由于虽然同步信号发射功率保持不变,但随着码片数的增加,Chirp信号的能量在时域不断累积,变换到分数域后能量全部聚集到峰值处,这就使得峰值的高度不断增加,从而更容易从噪声中分离出来.通过仿真数据也可总结出,如果要在低信噪比条件下提高Chirp信号分数域峰值判决法的同步误差精度,可以通过延长同步码字长度来实现.

图5给出同步码字长度为5 b、相位差为 $\pi/10$ 、 $\pi/4$ 情况下的同步误差精度.可以看出,随着相位差的增加,余弦时域滑动窗法的同步精度也随之下降,而分数域同步方法的精度并没有改变,这也验证了前面的推导.

图6为加入多径干扰后5 b码字长度的同步误差精度.通过比较可以看出,虽然2种方法的同步性能都恶化了,但Chirp信号分数域峰值判决法的同

步精度还是高于余弦滑动窗法。

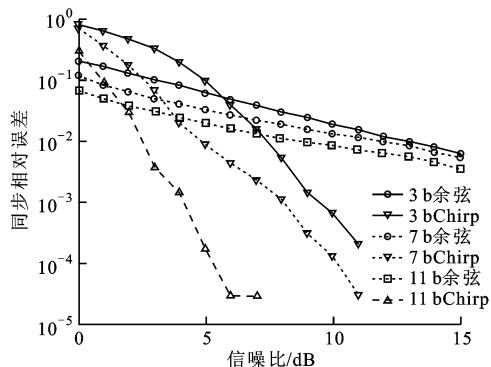


图4 不同码字长度的同步相对误差

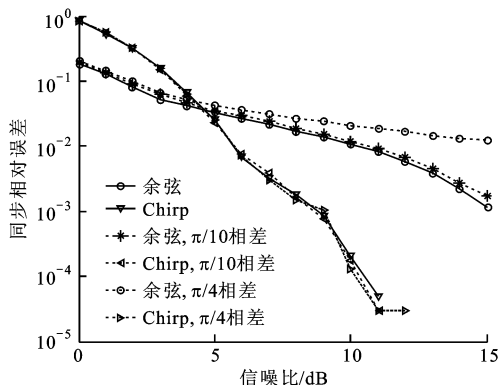


图5 存在相位差时的同步相对误差

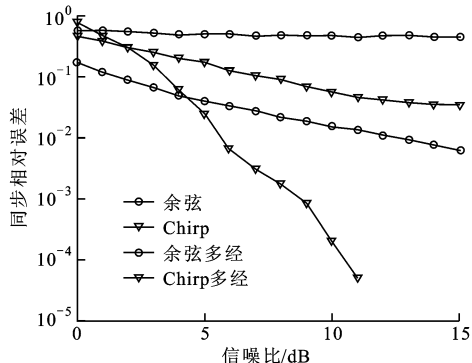


图6 不同码字长度的多径同步相对误差

## 4 结 论

本文提出一种在分数傅里叶变换域进行峰值判决的精确码同步方法。该方法使用 Chirp 信号作为同步信号,利用 Chirp 信号在分数傅里叶域的能量聚集特性,通过延长 Chirp 信号的时长来提高 Chirp 信号在分数域的峰值高度,使其从噪声和干扰中分离出来,从而提高了同步精度。仿真结果表明,随着同步码片数的增加,Chirp 信号峰值判决法的优势更加明显,在同步码占用多个码片长度时比余弦时域滑动窗方法误差更小,随着码片长度的增加,信号

能量累积,同步误差精度也随着不断提高。

## 参考文献:

- [1] NAMIAS V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics[J]. J Inst Math Applications, 1980,25(3):241-265.
- [2] MENDLOVIC D, OZAKTAS H M, LOHMANN A W. Self Fourier transforms and fractional Fourier transforms [J]. Opt Comm, 1994,105(1):36-38.
- [3] DENG Bing, TAO Ran. The analysis of resolution of the discrete fractional Fourier transform [C]//Proceedings of the First International Conference on Innovative Computing, Information and Control. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2006:10-13.
- [4] WANG Chuandan, ZHANG Zhongpei, LI Shaoqian. Interference avoidance using fractional Fourier transform in transform domain communication system [C] //9th International Conference on Advanced Communication Technology. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2007:1756-1760.
- [5] QU Haitao, QI Lini, MU Xiaomin, et al. DOA estimation of coherent wideband LFM signals based on fractional Fourier transform [C]//Proceedings of the First International Conference on Innovative Computing, Information and Control. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2006:14-17.
- [6] TAO Ran, Li Bingzhao, WANG Yue. Spectral analysis and reconstruction for periodic nonuniformly sampled signals in fractional Fourier domain[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55 (7): 3541-3547.
- [7] 邓兵, 陶然, 平殿发. 基于分数阶 Fourier 变换的 Chirp-rate 调制解调方法研究[J]. 电子学报, 2008, 36(6): 1078-1083.

DENG Bing, TAO Ran, PING Dianfa. Study on chirp-rate modulation and demodulation based on fractional Fourier transform [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(6): 1078-1083.

- [8] LIU Qi, HU Bo. A fast joint frame synchronization and frequency offset acquisition algorithm for OFDM systems[C] // IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2008: 1267-1272.

- [9] OZAKTAS H M, ZALEVSKY Z, KUTAY M A. The fractional Fourier transform with applications in optics and signal processing [M]. New York, USA: John Wiley & Sons Ltd., 2000: 200-230.

(编辑 刘杨)